見本

受験番号

数学 (3—1)	採点

数学

（3枚中の　第1枚）

志望学部	受験番号
学部	

注意
(1) 志望学部（1か所）と，受験番号（2か所）を記入すること。
(2) 解答は下線から下部に書くこと。下線から上部，および裏面には解答を書かないこと。

解答用紙

1

(1) $p=5$ としたとき $p+4$ は素数とならないため、条件を満たす最小の p は 7 である。
7以上の全ての自然数は
$6n+1,\ 6n+2,\ 6n+3,\ 6n+4,\ 6n+5,\ 6n+6$
(n:自然数) と表される。
このうち、$6n+2,\ 6n+3,\ 6n+4,\ 6n+6$ は
nの値に関わらず素数でない。

ここで、$p=6n+5$ のとき、
$p+4=6n+5+4$
$=3(2n+3)$ となり、素数とならない。
したがって $p=6n+1$ と表され、
pを6で割った余りは1である。

(2) (1)より $p=6n+1$ とおくと
$p+2=6n+1+2$
$=6n+3$
$=3(2n+1)$
$2n+1$は整数 より、
$p+2$は3の倍数である。

(3) $p,\ p+1,\ p+2,\ p+3,\ p+4$ の5つの数は
連続する5つの数なので、これらのうち一つが
5の倍数である。
ここで、$p,\ p+4$ は 条件と(1)より 7以上の素数であり、奇数。よって 5の倍数でない。
したがって $p+1,\ p+2,\ p+3$ のうちどれかが
5の倍数となる。…①

ここで、$(p+1)(p+2)(p+3)$ は連続する3つの数で
(2)より $p+2$ は3の倍数であり、奇数。…②
よって $p+1,\ p+3$ は $p,\ p+1,\ p+2,\ p+3$ の連続する4つの数のうちの2つの偶数であり、片方は4の倍数である。…③

①、②、③より、$(p+1)(p+2)(p+3)$ は約数に
$2^3\cdot 3\cdot 5=120$ をもつ。
よって $(p+1)(p+2)(p+3)$ は120の倍数である。

(別解)
$p,\ p+1,\ p+2,\ p+3,\ p+4$ の 5つの数は 連続する5つの数
なので、$p(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)$ は
$5!=2^3\cdot 3\cdot 5=120$ の倍数である。
ここで、$p,\ p+4$ は 7以上の素数のため、$2,3,5$を約数をもたない。
120の倍数である $p(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)$ を、
120の約数でない $p(p+4)$ で割った
$(p+1)(p+2)(p+3)$ も 120の倍数といえる。

◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆ 解答作成者から一言 ◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆

(3) 120の倍数であることを示すために
$(p+1)(p+2)(p+3)$ から 5の倍数を見つける必要がある。
問題に示された3つの数と $p,\ p+4$ が連続している5つの数だと気付くことができれば容易に解くことができる。
pに$6n+1$を代入することでも解くことができるが、
より手数がかかることになる。

採点

受験番号					

数学 (3—2)	採点

数学

(3枚中の　第2枚)

志望学部	受験番号
学部	

注　意
(1)　志望学部(1か所)と，受験番号(2か所)を記入すること。
(2)　解答は下線から下部に書くこと。下線から上部，および裏面には解答を書かないこと。

解答用紙

$\boxed{2}$

(1) $f(x) = x^3 - x$ とおくと

$f'(x) = 3x^2 - 1$

接点を $(t, t^3 - t)$ とおく

接線の方程式は

$y - (t^3 - t) = (3t^2 - 1)(x - t)$

$\therefore\ y = (3t^2 - 1)x - 2t^3$ — ①

点Pを通るので

$p = -2t^3 + 3t^2 - 1$ — ②

ここで $g(t) = -2t^3 + 3t^2 - 1$ とすると

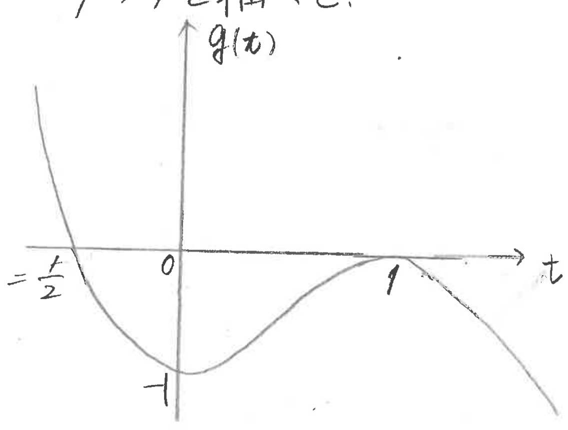
$g'(t) = -6t^2 + 6t = -6t(t - 1)$

$g'(t) = 0$ のとき $t = 0, 1$ であり $g(0) = -1, g(1) = 0$

増減表は以下

t	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	↘	-1	↗	0	↘

グラフを描くと，



$y = g(t)$ のグラフと直線 $y = p$ $(p < 0)$ の交点の個数が接線の本数に一致するので

$$\begin{cases} p < -1 \text{ のとき } 1\text{本} \\ p = -1 \text{ のとき } 2\text{本} \\ -1 < p < 0 \text{ のとき } 3\text{本} \end{cases}$$

//

(2) (a)　(1)より，ちょうど2本の接線が引けるとき

$p = -1$

このとき (1)の②は

$-1 = -2t^3 + 3t^2 - 1$

整理して $2t^3 - 3t^2 = 0$

$t^2(2t - 3) = 0$

$\therefore\ t = 0, \frac{3}{2}$

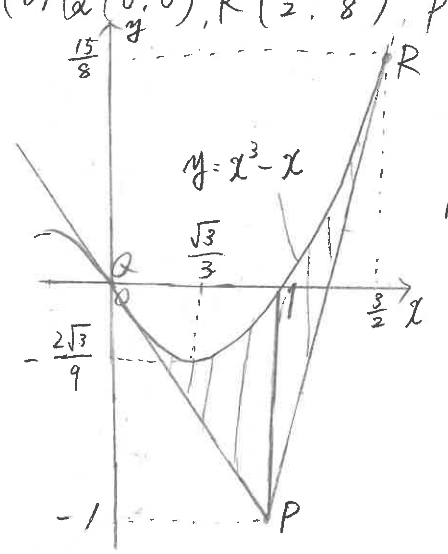
(1)の①より，求める接線の方程式は，

$t = 0$ のとき $y = -x$

$t = \frac{3}{2}$ のとき $y = \frac{23}{4}x - \frac{27}{4}$

//

(b) $Q(0, 0), R\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{8}\right), P(1, -1)$ である。



$PQ : y = -x$

$PR : y = \frac{23}{4}x - \frac{27}{4}$

$S = \int_0^1 \{x^3 - x - (-x)\}dx + \int_1^{\frac{3}{2}} \left\{x^3 - x - \left(\frac{23}{4}x - \frac{27}{4}\right)\right\}dx$

$= \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{27}{8}x^2 + \frac{27}{4}x\right]_1^{\frac{3}{2}}$

$= \frac{1}{4} + \frac{65}{64} - \frac{135}{32} + \frac{27}{8}$

$= \frac{27}{64}$

//

◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇　解答作成者から一言　◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇

(1)は直線 $y = p$ と $y = g(t)$ の交点の個数が接線の本数に一致するということがポイント。

(2)は，面積 S を求めるときの積分が少し煩雑であるため計算ミスのないように解き進めることがポイント。

受験番号

数学 (3—3)	採点

数学

（3枚中の　第3枚）

志望学部	受験番号
学部	

注意
(1) 志望学部（1か所）と，受験番号（2か所）を記入すること。
(2) 解答は下線から下部に書くこと。下線から上部，および裏面には解答を書かないこと。

解答用紙

3

(1) $a_{n+1}x^2+b_{n+1}x+c_{n+1}=\int_2^x\{(a_n+b_n)t+n\}dt$ …①

$(右辺)=\left[\frac{1}{2}(a_n+b_n)t^2+nt\right]_2^x$

$=\frac{1}{2}(a_n+b_n)x^2+nx-2(a_n+b_n)-2n$

$=\frac{1}{2}(a_n+b_n)x^2+nx-2(a_n+b_n+n)$

①の等式はすべての実数xについて成り立つので，係数比較して

$$\begin{cases} a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n) & \cdots② \\ b_{n+1}=n & \cdots③ \\ c_{n+1}=-2(a_n+b_n+n) & \cdots④ \end{cases}$$

$n\geqq 2$において，③のnを$n-1$に置き換えると，

$b_n=n-1$

これは$n=1$のときも$b_1=1-1=0$となり，成立する。

よって正の整数nにおいて　$b_n=n-1$

(2) (1)の結果を②に代入すると，

$a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+n-1)$

$=\frac{1}{2}a_n+\frac{n-1}{2}$

また，$a_{n+2}=\frac{1}{2}a_{n+1}+\frac{n}{2}$

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{n-1}{2}$

両辺引くと，

$a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)+\frac{1}{2}$ …⑤

正の整数nについて　$d_n=a_{n+1}-a_n$なので

⑤は　$d_{n+1}=\frac{1}{2}d_n+\frac{1}{2}$

$d_{n+1}-1=\frac{1}{2}(d_n-1)$ …⑥

ここで　$a_1=-1$，$a_2=\frac{1}{2}(a_1+b_1)=\frac{1}{2}(-1+0)$，$a_2=-\frac{1}{2}$

$d_1=a_2-a_1=-\frac{1}{2}-(-1)$，$d_1=\frac{1}{2}$

⑥について，数列$\{d_n-1\}$は，初項$d_1-1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$，公比$\frac{1}{2}$の等比数列だから，一般項は，

$d_n-1=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$d_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^n+1$

(3) (2)より，$d_n=a_{n+1}-a_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^n+1$

数列$\{d_n\}$は数列$\{a_n\}$の階差数列なので，

$n\geqq 2$のとき，

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{-\left(\frac{1}{2}\right)^k+1\right\}$

$=-1+\left\{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}+(n-1)\right\}$

$=-1-\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}+n-1$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+n-3$

$n=1$のとき

$a_1=\left(\frac{1}{2}\right)^0+1-3=-1$となり成立する。

したがって　$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+n-3$

(4) (1),(3)より，

$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+n-3$

$b_n=n-1$

これらを④に代入して，

$c_{n+1}=-2\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+n-3+(n-1)\right\}-2n$

$=-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-4n+8-2n$

$=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}-6n+8$

$n\geqq 2$においてnを$n-1$に置き換えて，

$c_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}-6(n-1)+8$

$=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}-6n+14$

これは$n=1$のとき　$c_1=-\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}-6+14=4$となり成り立つ。

よって正の整数nにおいて　$c_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}-6n+14$

◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆　解答作成者から一言　◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆◇◆

本問ではすべての実数xとすべての正の整数nという2つの変数が登場します。
闇雲に式変形を施すのではなく，恒等式であることに注目し，解きましょう。